МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ, МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

МОО ВО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина



УТВЕРЖДАЮ

Директор
(должность)
Лоцев Г.В
(ФИО)
3 сентября____2026 г.

Уравнения математической физики

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта**

Учебный план Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

Квалификация **бакалавр**
Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **4 ЗЕТ**
Часов по учебному плану 144
в том числе:
аудиторные занятия 58
самостоятельная работа 85,9

Виды контроля в семестрах:
зачет с оценкой 5

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**5 (3.1)**		Итого	
Недель	17 2/6			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	24	24	24	24
Практические	34	34	34	34
Контактная работа в период теоретического обучения	0,1	0,1	0,1	0,1
Итого ауд.	58	58	58	58
Контактная работа	58,1	58,1	58,1	58,1
Сам. работа	85,9	85,9	85,9	85,9
Итого	144	144	144	144

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

к.т.н, Джаманкулов Азамат Кенешбекович

Рецензент(ы):
к.ф.-м.н., Комарцов Никита Михайлович

д.т.н, Муслимов Аннас Поясович

Согласовано РОП:
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

Рабочая программа дисциплины
Уравнения математической физики

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика (приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 г. № 729)

составлена на основании учебного плана:

Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"
утвержденного учёным советом вуза от 26.06.2026 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании **Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта**

Протокол от 02.09.2026 г. № 1
Срок действия программы: 2026-2032 уч.г.
Руководитель подразделения: Алсеитов Мирлан Тилегенович

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ
к рабочей программе дисциплины (модуля)

Уравнения математической физики

№ п/п	Основание внесения изменения	Раздел/ пункт	Содержание изменения
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	Целью дисциплины «Уравнения математической физики» является изучение математических моделей
1.2	естественнонаучных явлений, которые приводят к задачам для дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными; ознакомление с некоторыми методами построения математических моделей физических процессов и явлений, основными типами уравнений в частных производных второго порядка, свойствами, особенностями и методами решения

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.О.3
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Б1.В.1.ДВ.06.01. Специальные главы высшей математики
2.1.2	Б1.О.3.02. Теоретическая механика
2.1.3	Б1.О.2.02. Математический анализ
2.1.4	Б1.О.2.03. Линейная алгебра и аналитическая геометрия
2.1.5	Б1.О.2.04. Дифференциальные уравнения
2.1.6	Б1.О.2.05. Теория вероятностей и математическая статистика
2.1.7	Б1.О.2.06. Физика
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Б2.О.02(Пд). Преддипломная практика
2.2.2	Б3.О.03. Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы
2.2.3	Б1.О.3.15. Программные системы компьютерной математики
2.2.4	Б1.В.1.02. Основы теории пластичности и ползучести
2.2.5	Б1.О.3.04. Строительная механика машин
2.2.6	Б3.О.02. Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена
2.2.7	Б1.В.1.06. Метод конечных элементов
2.2.8	Б1.В.1.ДВ.03.01. Численные методы в прикладной механике
2.2.9	Б1.В.1.ДВ.06.01. Специальные главы высшей математики

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности;	
Знать:	
Уровень 1	Способен применять стратегию работы на основе совместного обсуждения целей и направлений деятельности для реализации проблем естественнонаучных и общеинженерных знаний
Уровень 2	
Уровень 3	
Уметь:	
Уровень 1	Способен применять стратегию работы на основе совместного обсуждения целей и направлений деятельности для реализации методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности
Уровень 2	
Уровень 3	
Владеть:	
Уровень 1	Способен реализовать и корректировать и применять стратегию использования естественнонаучных и общеинженерных знаний, учитывая методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.
Уровень 2	
Уровень 3	

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	типы задач, решаемых с помощью уравнений математической физики; знать основные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными

3.2	**Уметь:**
3.2.1	уметь использовать основные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также применять эти знания и методы к описанию и решению прикладных задач
3.3	**Владеть:**
3.3.1	иметь навыки применения методов математического моделирования динамических технологических процессов для решения теоретических и практических задач

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Математические модели и постановка задач математической физики							
1.1	Уравнения математической физики как модели инженерных процессов. Неизвестные функции, независимые переменные и параметры в моделях распределённых систем; отличие уравнений с частными производными от обыкновенных дифференциальных уравнений. Вывод одномерного уравнения теплопроводности из баланса энергии и закона Фурье; физический смысл коэффициента температуропроводности. Вывод уравнения малых поперечных колебаний натянутой струны; предположения о натяжении, деформациях и распределении массы. Уравнения Лапласа и Пуассона как модели стационарных температурных и потенциальных полей. Размерности величин, выбор характерных масштабов и безразмерная запись простейших уравнений. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.2	Построение математических моделей теплопроводности и колебаний — определение допущений, параметров и размерностей /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

1.3	Классификация уравнений второго порядка и условия корректной постановки задач. Линейные и нелинейные, однородные и неоднородные уравнения с частными производными; роль старших производных. Классификация линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными по знаку дискриминанта главной части. Характеристические направления и приведение уравнений с постоянными коэффициентами к каноническому виду. Задача Коши, краевая и начально-краевая задачи; выбор условий для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений. Условия Дирихле, Неймана и Робина; их физическое содержание в задачах теплопроводности и колебаний. Существование, единственность и непрерывная зависимость решения от исходных данных; согласование начальных и граничных условий. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.4	Классификация уравнений второго порядка и приведение к каноническому виду — уравнения с постоянными коэффициентами. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.5	Постановка начальных и краевых условий для инженерных задач — выбор условий Дирихле, Неймана и Робина, проверка согласования данных /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

1.6	Разделение переменных и задача Штурма — Лиувилля. Представление решения в виде произведения функций и условия применимости метода разделения переменных. Получение обыкновенных дифференциальных уравнений и выбор постоянной разделения. Задача Штурма — Лиувилля на конечном отрезке: собственные значения, собственные функции и граничные условия. Ортогональность собственных функций; скалярное произведение с весом и нормирование. Разложение заданной функции по собственным функциям; вычисление коэффициентов синусного и косинусного рядов Фурье. Усечение ряда, характер сходимости и в /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.7	Решение задач Штурма — Лиувилля на отрезке — определение собственных значений и собственных функций при разных закреплениях. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.8	Разложение начальных распределений в ряды Фурье — вычисление коэффициентов и сравнение усечённых разложений. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.9	Математические модели распределённых физических процессов. Систематизация допущений моделей струны, стержня и теплопроводящей среды; самостоятельный вывод одной модели из закона баланса. Классификация уравнений и постановка задач. Приведение уравнений к каноническому виду; подбор физических граничных условий и проверка согласования исходных данных. Спектральные задачи и ряды Фурье. Решение задач на собственные значения; разложение кусочно-заданных функций и исследование точности усечённого ряда. /Ср/	5	24	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 2. Гиперболические уравнения и колебательные процессы							

2.1	Волновое уравнение на бесконечной прямой и формула Даламбера. Постановка задачи Коши для одномерного волнового уравнения: начальное перемещение и начальная скорость. Характеристические координаты и представление решения через волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Формула Даламбера и физическое содержание её составляющих. Конечная скорость распространения возмущений, область зависимости и область влияния начальных данных. Распространение локального импульса и изменение профиля волны на конкретных примерах. Энергия волнового движения и закон её сохранения при отсутствии внешних воздействий. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.2	Решение задачи Коши для волнового уравнения по формуле Даламбера — построение профилей волн и областей зависимости. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.3	Свободные и вынужденные колебания ограниченной системы. Начально-краевая задача для струны с закреплёнными концами и её решение методом разделения переменных. Собственные формы и частоты колебаний; зависимость частот от длины, натяжения и линейной плотности струны. Определение коэффициентов модального разложения по начальным перемещениям и скоростям. Вынужденные колебания при распределённой нагрузке: разложение нагрузки и получение уравнений для модальных координат. Резонанс в идеализированной системе без демпфирования; пределы применимости такой модели. Аналогия с продольными колебаниями однородного упругого стержня и изменение спектра при других закреплениях. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

2.4	Расчёт свободных колебаний струны с закреплёнными концами — собственные частоты, формы и модальные коэффициенты. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.5	Расчёт вынужденных колебаний методом модального разложения — реакция на гармоническую распределённую нагрузку. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.6	Распространение волн и формула Даламбера. Расчёт движения локального возмущения, построение характеристик и анализ влияния начальной скорости. Модальный анализ свободных и вынужденных колебаний. Сравнение спектров при разных закреплениях; исследование влияния нагрузки на отдельные моды. /Ср/	5	14	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 3. Параболические уравнения и процессы теплопереноса.							
3.1	Нестационарная теплопроводность на конечном отрезке. Начально-краевая задача для однородного стержня с заданной температурой на концах. Выделение стационарной составляющей и приведение постоянных неоднородных граничных условий к однородным. Построение решения методом Фурье и вычисление коэффициентов по начальному распределению температуры. Затухание температурных мод и влияние температуропроводности на скорость установления режима. Теплоизолированные границы и конвективный теплообмен: изменение собственных функций и условий спектральной задачи. Внутренние источники тепла и переход от уравнения в частных производных к системе модальных уравнений. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.2	Решение задачи теплопроводности для стержня с заданными температурами на концах — стационарная и переходная составляющие. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

3.3	Теплопроводность при теплоизоляции и внутренних источниках — построение спектрального решения и анализ теплового баланса. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.4	Теплопроводность в неограниченной области и свойства решенийю Задача Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Фундаментальное решение и его интерпретация как распределения температуры от мгновенного точечного источника. Представление решения через свёртку теплового ядра с начальным распределением. Сглаживание начальных неоднородностей и изменение характерной ширины температурного распределения со временем. Принцип максимума и его применение к оценке температуры и обоснованию единственности решения. Интегральный баланс тепла; различия между математической моделью диффузии и моделью волнового распространения. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.5	Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности — применение теплового ядра к локализованному начальному распределению. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.6	Теплопроводность в ограниченной области. Построение решений для различных начальных температур; оценка времени затухания ведущей температурной моды. Тепловое ядро и свойства диффузионного процесса. Вычисление и визуализация решения задачи Коши; проверка принципа максимума и интегрального баланса. /Ср/	5	14	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 4. Эллиптические уравнения и стационарные поля							

4.1	Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Постановка задач для стационарной теплопроводности и потенциальных полей; физическое содержание правой части уравнения Пуассона. Гармонические функции, свойство среднего и принцип максимума. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике; разделение переменных и построение решения для данных на одной стороне. Суперпозиция решений при задании температуры на нескольких сторонах прямоугольника. Задача Неймана: условие совместности источников и граничных потоков, определённость решения с точностью до постоянной. Проверка решения по граничным условиям, симметрии и физически допустимым значениям поля. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.2	Стационарное температурное поле в круге и кольцевой области — применение полярных координат и граничных условий. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.3	Построение функции Грина для одномерной задачи Пуассона — получение решения при заданном распределении источников. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

4.4	Полярные координаты и функция Грина в краевых задачах. Оператор Лапласа в полярных координатах и выбор координат с учётом геометрии области. Разделение переменных для уравнения Лапласа в круге; периодичность угловой составляющей и ограниченность решения в центре. Решение задачи Дирихле в круге через ряд Фурье граничной функции. Осесимметричная стационарная теплопроводность в кольцевой области и логарифмическое распределение температуры. Функция Грина как отклик на точечный источник; зависимость функции Грина от области и граничных условий. Построение функции Грина для одномерной задачи Пуассона с однородными условиями Дирихле и интегральное представление решения. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.5	Конечно-разностное решение задачи Пуассона — сборка системы, вычисление решения и оценка сеточной сходимости. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.6	Стационарные поля в прямоугольной области. Решение задач с неоднородными граничными данными; анализ совместности задачи Неймана. Задачи в полярных координатах и функция Грина. Построение поля в круге или кольце; применение одномерной функции Грина к распределённому источнику. /Ср/	5	15	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 5. Численное решение и связь с вычислительной механикой							

5.1	Конечно-разностное решение стационарных краевых задач. Расчётная сетка и аппроксимация первых и вторых производных конечными разностями. Разностная постановка одномерной задачи Пуассона; формирование системы линейных алгебраических уравнений. Пятиточечная аппроксимация оператора Лапласа на равномерной прямоугольной сетке. Включение условий Дирихле и Неймана в разностную систему; особенности чистой задачи Неймана. Структура разреженной матрицы; прямое решение и простейшие итерационные методы. Проверка на известном аналитическом решении, оценка ошибки и исследование сходимости при измельчении сетки. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.2	Конечно-разностное решение задачи Пуассона — сборка системы, вычисление решения и оценка сеточной сходимости. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.3	Разностные схемы для теплопроводности и волнового уравнения. Пространственная и временная сетки; дискретизация начальных и граничных условий. Явная схема для одномерного уравнения теплопроводности и ограничение шага времени через число Фурье. Неявная схема теплопроводности: получение трёхдиагональной системы и применение метода прогонки. Центральная разностная схема для волнового уравнения; построение первого временного слоя по начальной скорости. Условие Куранта, устойчивость и численная дисперсия при расчёте распространения волн. Различие аппроксимации, устойчивости и сходимости; проверка расчёта по аналитическим решениям и интегральным характеристикам. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

5.4	Численное решение уравнений теплопроводности и колебаний — сравнение устойчивого и неустойчивого расчётов, проверка ограничений на шаг времени. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.5	Слабая постановка краевой задачи и введение в метод конечных элементов. Переход от одномерной задачи стационарной теплопроводности к интегральной форме методом взвешенных невязок. Интегрирование по частям и снижение требований к гладкости искомого решения. Существенные и естественные граничные условия; их связь с заданной температурой и тепловым потоком. Приближение решения линейными функциями формы на двухузловом элементе. Получение локальной матрицы и вектора нагрузки, сборка глобальной системы на примере двух элементов. Сопоставление аналитического, конечно-разностного и конечно-элементного решений; проверка граничных условий, баланса и сходимости. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.6	Конечно-элементное решение одномерной задачи теплопроводности — матрицы линейных элементов, сборка системы и сравнение с точным решением. /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.7	Конечно-разностное решение эллиптической задачи. Реализация расчёта в MATLAB или Python; сравнение ошибок на нескольких сетках. Устойчивость нестационарных численных расчётов. Исследование влияния пространственного и временного шагов на решение; сопоставление с аналитическим эталоном. Слабая постановка и конечно-элементное приближение. Вывод матрицы линейного элемента, расчёт на нескольких сетках и сопоставление с аналитическим решением. /Ср/	5	18,9	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.8	Консультации и проведение зачета /КрТО/	5	0,1	ОПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

Материалы соответствуют предложенному содержанию курса для направления 15.03.03 «Прикладная механика», профиля «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг».

Во всех заданиях необходимые производные предполагаются существующими; коэффициенты температуропроводности и скорости распространения волн — положительными. Обозначение \(u\) используется для температуры, перемещения или потенциала в зависимости от рассматриваемой задачи.

1. Контрольные вопросы для текущего контроля

Раздел 1. Математические модели и постановка задач

1. Чем уравнения с частными производными отличаются от обыкновенных дифференциальных уравнений?
2. Как определяются порядок и линейность уравнения с частными производными?
3. Какие законы и допущения используются при выводе одномерного уравнения теплопроводности?
4. Как выводится уравнение малых поперечных колебаний струны? Какие факторы определяют скорость распространения волны?
5. Какие физические процессы описывают уравнения Лапласа и Пуассона?
6. Как классифицируется уравнение \(Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+\ldots=0\) по знаку \(B^2-AC\)?
7. Что называют характеристиками и каноническим видом уравнения?
8. Чем различаются задача Коши, краевая и начально-краевая задачи?
9. Каков физический смысл условий Дирихле, Неймана и Робина?
10. Что означает корректность задачи? Как проверяется согласование начальных и граничных условий?

Раздел 2. Разделение переменных и спектральные методы

11. В чём заключается метод разделения переменных и каковы ограничения его применения?
12. Как из уравнения с частными производными получается задача на собственные значения?
13. Что представляют собой собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля?
14. При каких условиях собственные функции ортогональны? Как учитывается весовая функция?
15. Как вычисляются коэффициенты разложения функции по собственным функциям?
16. Когда используются синусные и косинусные ряды Фурье?
17. Как гладкость исходной функции влияет на сходимость её ряда Фурье?
18. Что происходит при усечении ряда и как оценивается точность приближённого решения?

Раздел 3. Волновое уравнение

19. Какие начальные данные необходимы для решения задачи Коши для волнового уравнения?
20. Как записывается формула Даламбера и как интерпретируются её составляющие?
21. Что означают область зависимости и область влияния начальных данных?
22. Как проявляется конечная скорость распространения возмущений?
23. Как определяются собственные формы и частоты струны с закреплёнными концами?
24. Как начальное перемещение и начальная скорость определяют модальные коэффициенты?
25. Как распределённая нагрузка включается в уравнения для модальных координат?
26. При каких условиях возникает резонанс? Каковы ограничения модели без демпфирования?
27. Как записывается энергия колебаний струны и при каких условиях она сохраняется?

Раздел 4. Уравнение теплопроводности

28. Какие начальные и граничные условия необходимы для задачи теплопроводности на конечном отрезке?
29. Как выделение стационарной составляющей позволяет получить однородные граничные условия?
30. Как строится решение задачи теплопроводности методом Фурье?
31. Почему высокочастотные температурные моды затухают быстрее низкочастотных?
32. Как изменяется постановка задачи при теплоизоляции концов стержня?
33. Как учитываются внутренние источники тепла?
34. Что представляет собой фундаментальное решение уравнения теплопроводности?
35. Как решение задачи Коши выражается через свёртку с тепловым ядром?
36. В чём состоит принцип максимума и как он применяется для оценки решения?
37. При каких условиях сохраняется интеграл температуры по пространству и как он связан с тепловым балансом?

Раздел 5. Уравнения Лапласа и Пуассона

38. Что называют гармонической функцией?
39. Как формулируются свойство среднего и принцип максимума для гармонических функций?
40. Как строится решение задачи Дирихле в прямоугольнике методом разделения переменных?
41. Как используется принцип суперпозиции при неоднородных данных на нескольких сторонах области?
42. Каково условие совместности задачи Неймана для уравнения Пуассона?
43. Почему решение чистой задачи Неймана определяется с точностью до постоянной?
44. Как записывается оператор Лапласа в полярных координатах?
45. Какие требования предъявляются к решению уравнения Лапласа в центре круга?
46. Почему осесимметричное решение в кольцевой области содержит логарифм радиуса?
47. Что представляет собой функция Грина и как она используется для решения неоднородной краевой задачи?

Раздел 6. Численные методы

48. Как аппроксимируются первая и вторая производные на равномерной сетке?
49. Как формируется разностная система для одномерной задачи Пуассона?
50. Как строится пятиточечная аппроксимация оператора Лапласа?
51. Как учитываются граничные условия в разностной системе?
52. Чем различаются аппроксимация, устойчивость и сходимость численного метода?
53. Каково условие устойчивости явной схемы для одномерного уравнения теплопроводности?
54. Чем отличаются явная и неявная схемы? Когда применяется метод прогонки?
55. Как строится первый временной слой разностного решения волнового уравнения?
56. Каков смысл условия Куранта? Что называют численной дисперсией?
57. Как выполняется проверка численного решения по аналитическому эталону и на последовательности сеток?

58. Как получается слабая постановка одномерной задачи теплопроводности?
59. Чем различаются существенные и естественные граничные условия?
60. Как формируются локальная матрица линейного конечного элемента и глобальная система?

2. Задания для текущего контроля

Раздел 1. Математические модели и постановка задач

Задание 1. Построение модели теплопроводности.

Для однородного стержня постоянного поперечного сечения вывести уравнение

$$
\rho c\,u_t=k u_{xx}+q(x,t),
$$

где q — объёмная мощность внутренних источников тепла. Сформулировать начальные и граничные условия для случая, когда левый конец имеет заданную температуру, а правый теплоизолирован. Указать размерности коэффициентов.

Задание 2. Классификация уравнений.

Определить тип каждого уравнения:

$$
u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}=0;\qquad
u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0;\qquad
u_{xx}+u_{yy}=0.
$$

Первое уравнение привести к каноническому виду, указав замену переменных.

Задание 3. Согласование исходных данных.

Для задачи

$$
u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<L,\qquad
u(0,t)=0,\quad u(L,t)=T_0,\quad u(x,0)=\varphi(x)
$$

установить условия согласования при $t=0$. Проверить их для функций $\varphi(x)=0$ и $\varphi(x)=T_0x/L$. Объяснить последствия несогласованности для непрерывности решения в угловых точках.

Раздел 2. Спектральные методы

Задание 4. Задача на собственные значения.

Найти собственные значения и собственные функции:

$$
X''+\lambda X=0,\qquad X(0)=0,\quad X'(L)=0.
$$

Проверить ортогональность первых двух собственных функций.

Задание 5. Разложение в ряд Фурье.

Разложить функцию

$$
\varphi(x)=x(L-x),\qquad 0<x<L
$$

в синусный ряд Фурье. Построить приближения по первым одной, трём и пяти ненулевым гармоникам и сравнить их с исходной функцией.

Раздел 3. Волновое уравнение

Задание 6. Формула Даламбера.

Решить задачу:

$$
u_{tt}=c^2u_{xx},\quad x\in\mathbb R,\qquad
u(x,0)=e^{-x^2/\ell^2},\quad u_t(x,0)=0,\quad \ell>0.
$$

Показать направления движения волн и построить профили решения для нескольких моментов времени.

Задание 7. Свободные колебания струны.

Найти решение:

$$
u_{tt}=c^2u_{xx},\quad 0<x<L,\qquad u(0,t)=u(L,t)=0,
$$

$$
u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{L}+B\sin\frac{3\pi x}{L},
\qquad u_t(x,0)=0.
$$

Определить присутствующие частоты и проверить начальные условия.

Задание 8. Вынужденные колебания.

Для струны с закреплёнными концами и нулевыми начальными данными рассмотреть уравнение:

$$
u_{tt}=c^2u_{xx}+F_0\sin\frac{\pi x}{L}\cos\Omega t.
$$

Получить уравнение первой модальной координаты. Найти решение вне резонанса и при $\Omega=\pi c/L$.

Раздел 4. Теплопроводность

Задание 9. Метод Фурье.

Решить задачу:
$$
u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<L,\qquad u(0,t)=u(L,t)=0,
$$
$$
u(x,0)=T_0\sin\frac{\pi x}{L}.
$$
Определить время, за которое максимальная температура уменьшится вдвое.

Задание 10. Неоднородные граничные условия.

Найти стационарную и переходную составляющие решения:
$$
u_t=a^2u_{xx},\quad u(0,t)=T_1,\quad u(L,t)=T_2,
$$
$$
u(x,0)=T_1+\frac{T_2-T_1}{L}x+A\sin\frac{\pi x}{L}.
$$
Установить предельное распределение температуры при $t\to\infty$.

Задание 11. Теплопроводность на бесконечной прямой.

Решить задачу Коши для начального распределения
$$
u(x,0)=
\begin{cases}
T_0,& |x|\leqslant \ell,\\
0,& |x|>\ell.
\end{cases}
$$
Представить решение через тепловое ядро; исследовать сглаживание границ начального профиля и сохранение интеграла $\int_{\mathbb R}u(x,t)\,dx$.

Раздел 5. Стационарные поля

Задание 12. Уравнение Лапласа в прямоугольнике.

Решить задачу:
$$
u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<H,
$$
$$
u(0,y)=u(L,y)=u(x,0)=0,\qquad
u(x,H)=T_0\sin\frac{\pi x}{L}.
$$
Проверить уравнение и все граничные условия.

Задание 13. Поле в кольцевой области.

Найти осесимметричное решение уравнения Лапласа в области $R_1<r<R_2$ при
$$
u(R_1)=T_1,\qquad u(R_2)=T_2.
$$
Определить радиальную плотность теплового потока при постоянной теплопроводности k.

Задание 14. Функция Грина.

Построить функцию Грина для оператора $-d^2/dx^2$ на отрезке $(0,L)$ с нулевыми условиями Дирихле. Использовать её для решения:
$$
-u''=f_0,\qquad u(0)=u(L)=0.
$$
Проверить результат непосредственным интегрированием.

Раздел 6. Численные методы

Задание 15. Конечно-разностная задача.

Решить численно:
$$
-u''=\pi^2\sin(\pi x),\quad 0<x<1,\qquad u(0)=u(1)=0.
$$
Использовать сетки с шагами $h=1/10,\;1/20,\;1/40$. Сравнить результаты с $u(x)=\sin(\pi x)$, вычислить максимальную узловую ошибку и оценить порядок сходимости.

Задание 16. Устойчивость явной схемы.

Для уравнения $u_t=\alpha u_{xx}$ при $\alpha=10^{-4}\ \text{м}^2/\text{с}$ и $h=0{,}01\ \text{м}$ определить максимально допустимый шаг времени для стандартной явной схемы. Сравнить расчёты при $\Delta t=0{,}25\ \text{с}$ и $\Delta t=0{,}75\ \text{с}$.

Задание 17. Первый временной слой волновой схемы.

Для уравнения $u_{tt}=c^2u_{xx}$ вывести формулу вычисления первого слоя по данным $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$ с точностью второго порядка по времени. Проверить условие Куранта при $c=100\ \text{м}/\text{с}$, $h=0{,}1\ \text{м}$, $\Delta t=0{,}0005\ \text{с}$.

Задание 18. Метод конечных элементов.
Получить слабую постановку задачи
$$
-u''=1,\quad 0<x<1,\qquad u(0)=u(1)=0.
$$
Решить её методом линейных конечных элементов на двух равных элементах. Выписать локальные матрицы и векторы нагрузки, собрать систему и сравнить приближённую функцию с точным решением.
3. Контрольные вопросы для промежуточной аттестации
1. Вывод уравнения теплопроводности из закона баланса энергии. Допущения и физический смысл коэффициентов.
2. Вывод волнового уравнения для натянутой струны. Связь скорости волны с параметрами системы.
3. Уравнения Лапласа и Пуассона в моделях стационарных полей.
4. Классификация уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.
5. Характеристики и приведение уравнений с постоянными коэффициентами к каноническому виду.
6. Задача Коши, краевая и начально-краевая задачи. Условия корректности и согласования данных.
7. Условия Дирихле, Неймана и Робина и их инженерная интерпретация.
8. Метод разделения переменных. Задача Штурма — Лиувилля и ортогональность собственных функций.
9. Ряды Фурье и определение коэффициентов спектрального разложения.
10. Формула Даламбера. Области зависимости и влияния начальных данных.
11. Свободные колебания струны с закреплёнными концами. Собственные формы и частоты.
12. Вынужденные колебания, модальное разложение нагрузки и резонанс.
13. Энергия волнового движения и условия её сохранения.
14. Решение задачи теплопроводности на отрезке методом Фурье.
15. Приведение неоднородных граничных условий к однородным.
16. Теплоизолированные границы, внутренние источники и тепловой баланс.
17. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и решение задачи Коши.
18. Принцип максимума для уравнения теплопроводности и его следствия.
19. Гармонические функции, свойство среднего и принцип максимума.
20. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике.
21. Задача Неймана для уравнения Пуассона: совместность и единственность.
22. Уравнение Лапласа в полярных координатах. Задачи в круге и кольце.
23. Функция Грина для одномерной краевой задачи и интегральное представление решения.
24. Конечно-разностная аппроксимация задачи Пуассона и учёт граничных условий.
25. Явная и неявная схемы теплопроводности. Устойчивость и решение трёхдиагональной системы.
26. Разностная схема волнового уравнения. Первый временной слой и условие Куранта.
27. Аппроксимация, устойчивость, сходимость и проверка численного решения.
28. Слабая постановка краевой задачи. Существенные и естественные граничные условия.
29. Линейный конечный элемент: функции формы, локальная матрица, вектор нагрузки и сборка системы.
30. Сравнение аналитического, конечно-разностного и конечно-элементного подходов к решению инженерной задачи.
4. Типовые задания для промежуточной аттестации
Задание 1. Классификация и канонический вид
Определить тип уравнения
$$
u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}=0.
$$
Найти характеристические направления и привести уравнение к каноническому виду.
Задание 2. Спектральная задача
Найти собственные значения и собственные функции:
$$
X''+\lambda X=0,\qquad X'(0)=0,\quad X(L)=0.
$$
Объяснить, для какой задачи теплопроводности применим полученный базис.
Задание 3. Задача Коши для волнового уравнения
Решить:
$$
u_{tt}=c^2u_{xx},\qquad
u(x,0)=0,\qquad u_t(x,0)=V_0e^{-x^2/\ell^2}.
$$
Допускается представить решение через определённый интеграл. Указать область начальных данных, от которой зависит $u(x_0,t_0)$.
Задание 4. Свободные колебания
Решить задачу для струны с закреплёнными концами:
$$
u_{tt}=c^2u_{xx},\qquad
u(x,0)=A\sin\frac{2\pi x}{L},\qquad
u_t(x,0)=V\sin\frac{2\pi x}{L}.
$$
Определить частоту колебаний и проверить начальные условия.
Задание 5. Нестационарная теплопроводность

Решить:
$$
u_t=\alpha u_{xx},\quad 0<x<L,\qquad u(0,t)=u(L,t)=0,
$$
$$
u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{L}+B\sin\frac{2\pi x}{L}.
$$
Сравнить скорости затухания составляющих и определить ведущую моду при больших временах, если $A\neq0$.

Задание 6. Теплоизолированный стержень

Решить:
$$
u_t=\alpha u_{xx},\qquad u_x(0,t)=u_x(L,t)=0,
$$
$$
u(x,0)=T_m+A\cos\frac{\pi x}{L}.
$$
Найти предельную температуру и объяснить сохранение средней температуры.

Задание 7. Стационарное поле в прямоугольнике

Найти гармоническую функцию в прямоугольнике $0<x<L,\;0<y<H$, равную нулю на сторонах $x=0,\;x=L,\;y=0$, если
$$
u(x,H)=A\sin\frac{2\pi x}{L}.
$$
Проверить решение.

Задание 8. Совместность задачи Неймана

Для задачи
$$
-u''=f(x),\quad 0<x<L,\qquad u'(0)=g_0,\quad u'(L)=g_L
$$
вывести условие совместности. Проверить его при $f(x)=f_0$. Указать дополнительное условие, позволяющее выбрать единственное решение.

Задание 9. Проверка разностного решения

Составить разностную систему для
$$
-u''=2,\quad 0<x<1,\qquad u(0)=u(1)=0
$$
при $h=1/4$. Найти узловые значения и сравнить их с точным решением. Объяснить полученный результат сравнения.

Задание 10. Устойчивость численного расчёта

Для явной схемы уравнения теплопроводности при $\alpha=0{,}02$, $h=0{,}1$, $\Delta t=0{,}3$ проверить условие устойчивости. Найти максимально допустимый шаг времени и предложить изменение расчётной схемы или её параметров.

Задание 11. Конечно-элементная постановка

Для задачи
$$
-(k u')'=q,\quad 0<x<L,\qquad u(0)=0,\quad k u'(L)=P,
$$
где $k>0$ и q постоянны, получить слабую форму. Указать существенное и естественное граничные условия. Выписать матрицу и вектор нагрузки линейного элемента длиной h, включая вклад граничного условия для крайнего элемента.

5. Рекомендуемый состав аттестационного варианта

Каждый вариант включает:

- один теоретический вопрос по математическим моделям, постановке задач или свойствам решений;
- один теоретический вопрос по аналитическим либо численным методам;
- одну практическую задачу из приведённого перечня.

При оценивании учитываются правильность постановки задачи, обоснованность выбора метода, корректность вычислений, проверка исходных условий и физическая интерпретация результата. Форма промежуточной аттестации устанавливается по учебному плану.

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

курсовых работы не предусмотрены

5.3. Фонд оценочных средств

2 Организация контроля и критерии

2 1 Предлагаемая процедура

Текущий контроль: короткие опросы и тестирование; оценка решений на практических занятиях и домашних заданий; три контрольные работы; одна РГР по варианту А или Б; две компьютерные работы с индивидуальной защитой. Отдельные отчёты по лабораторным работам не требуются.

Опрос — 5–10 минут, тест — 20 минут, контрольная работа — 60 минут. РГР выполняется вне аудитории в течение двух недель, защита занимает 10–15 минут. Компьютерные работы выполняются с использованием MATLAB, GNU Octave или Python; конкретный инструмент согласуется преподавателем с учётом доступного ПО.

Допускаются аналитические вычисления вручную и проверка средствами компьютерной математики. В контрольных работах и аттестации применение ПО и справочных материалов заранее объявляется преподавателем. Использование

готового решения не заменяет индивидуального объяснения метода и проверки результата.
Сроки пересдачи, специальные условия для обучающихся и формальный допуск определяются действующими правилами университета. Предлагаемые ниже баллы не создают дополнительных оснований для недопуска.
2 2 Текущий контроль
Средство Максимум Правило расчёта
Опросы 10 Среднее нормированных оценок за объявленные опросы
Тест 10 12 ответов; балл = 10 × число верных / 12
Практические и домашние задания 20 Среднее оценок П1–П18 по рубрике × 2
Контрольные работы 30 КР1, КР2, КР3 — по 10 баллов
РГР с защитой 15 Одна работа А или Б
Компьютерные работы 15 К1 и К2 по 15; среднее двух оценок
Всего 100 Без двойного учёта одной и той же работы

Округление выполняется только после суммирования, до одного десятичного знака. При изменении числа опросов перечень оцениваемых работ объявляется заранее. Оценка активности сама по себе не заменяет проверку результата обучения.
2 3 Рубрики оценивания
Практическая задача или контрольная работа Баллы
Модель, исходные условия и выбор метода 0–2
Математические преобразования и вычисления 0–4
Проверка уравнения, начальных и граничных условий 0–2
Интерпретация результата, размерности и ясность записи 0–2
Максимум 10

Для контрольной работы рубрика применяется к каждой из трёх задач; среднее трёх оценок даёт балл КР. Для вопроса устного опроса: точность и полнота — 0–4, объяснение связей и условий применимости — 0–3, пример или обоснование — 0–3; максимум 10.
РГР или компьютерная работа Баллы
Модель и обоснование условий 0–3
Корректность решения или алгоритма 0–4
Проверка решения, ошибки или баланса 0–3
Графики и содержательные выводы 0–2
Индивидуальная защита 0–3
Максимум 15

Рубрики допускают частичные баллы за правильные этапы. Если неверно определён тип задачи, применён неприменимый метод либо нарушено условие устойчивости, соответствующий критерий получает 0; преподаватель также оценивает, какие последующие вычисления остаются содержательно верными.
2 4 Уровни освоения и итоговая оценка
Баллы из 100 Уровень Рекомендуемая оценка
85–100 Высокий: самостоятельное обоснованное решение и проверка Отлично
70–84,9 Достаточный: верный метод, отдельные негрубые ошибки Хорошо
50–69,9 Пороговый: выполнены основные этапы типовой задачи Удовлетворительно
Менее 50 Результаты не подтверждены в достаточном объёме Неудовлетворительно

Если локальные правила допускают накопительную оценку, предлагается итог $I = 0{,}6T + 0{,}4A$, где T — текущий контроль, A — аттестация, оба из 100. При этом A должно быть не менее 50: текущими баллами неудовлетворительная аттестация не компенсируется. При экзамене без накопления применяется только A. Для зачёта предлагается порог $A \geq 50$ с учётом требований к текущим работам по правилам вуза. Это альтернативы для согласования, а не одновременно действующие процедуры.

3 Вопросы текущего контроля
Модели и постановка задач
1. Чем уравнение с частными производными отличается от ОДУ?
2. Как определяются порядок и линейность уравнения?
3. Как баланс энергии и закон Фурье приводят к уравнению теплопроводности?
4. Какие допущения нужны для вывода уравнения малых колебаний струны?
5. Какой физический смысл имеют уравнения Лапласа и Пуассона?
6. Как знак $B^2 - AC$ определяет тип уравнения $Au_{xx} + 2Bu_{x\gamma} + Cu_{\gamma\gamma} + \ldots = 0$?
7. Что такое характеристики и канонический вид уравнения?
8. Чем различаются задача Коши, краевая и начально-краевая задачи?
9. Как интерпретируются условия Дирихле, Неймана и Робина?
10. Что означает корректность и как согласуются начальные и граничные данные?
Спектральные методы
11. В чём состоит разделение переменных и когда оно применимо?
12. Как возникает задача Штурма — Лиувилля?
13. Что означают собственные значения и собственные функции?
14. Как формулируется ортогональность с весом?

15. Как вычисляются коэффициенты синусного и косинусного рядов?
16. Как гладкость данных и усечение ряда влияют на точность?

Волновое уравнение

17. Какие два начальных условия необходимы для волновой задачи?
18. Как записывается и интерпретируется формула Даламбера?
19. Что означают область зависимости и конечная скорость возмущений?
20. Как определяются собственные частоты и формы закреплённой струны?
21. Как нагрузка включается в модальные уравнения и когда возникает резонанс?
22. Как записывается энергия струны и при каких условиях она сохраняется?

Теплопроводность

23. Как строится решение тепловой задачи на отрезке методом Фурье?
24. Как выделяется стационарная составляющая при заданных температурах концов?
25. Почему высокие температурные моды затухают быстрее?
26. Что меняется при теплоизоляции границ и наличии источников?
27. Как тепловое ядро используется в задаче Коши?
28. Как принцип максимума и тепловой баланс помогают проверить решение?

Эллиптические задачи

29. Что такое гармоническая функция и свойство среднего?
30. Как принцип максимума обеспечивает единственность задачи Дирихле?
31. Как решается задача Лапласа в прямоугольнике?
32. Каково условие совместности чистой задачи Неймана?
33. Как записывается оператор Лапласа в полярных координатах и выбирается решение в круге?
34. Что такое функция Грина и как через неё представить решение?

Численные методы

35. Как строится центральная аппроксимация второй производной?
36. Как получается пятиточечная схема для оператора Лапласа?
37. Как включаются граничные условия в разностную систему?
38. Чем различаются аппроксимация, устойчивость и сходимость?
39. Каковы условия устойчивости стандартных явных схем тепла и волны?
40. Как вычислить первый временной слой волновой схемы?
41. Как проверить решение по эталону и при измельчении сетки?
42. Как получают слабую форму, матрицу линейного элемента и учитывают естественные условия?

4 Практические задания

Параметры L, c, α, ℓ, k, ρ и c_p положительны; остальные постоянные задаются условием. α — температуропроводность, c — скорость волны, c_p — удельная теплоёмкость. В формулах теплопроводности $\alpha = k/(\rho c_p)$. Допускается символический ответ. Все заданные условия необходимо проверять.

П1 Модель теплопроводности

Для однородного стержня постоянного сечения вывести $\rho c_p u_t = k u_{xx} + q(x,t)$, где q — объёмная мощность источника. Левый конец имеет температуру $T_l(t)$, правый теплоизолирован. Задать начальное распределение φ(x), условия согласования и размерности величин.

П2 Классификация

Определить тип уравнений $u_{xx}+4u_{x\gamma}+u_{\gamma\gamma}=0$; $u_{xx}+2u_{x\gamma}+u_{\gamma\gamma}=0$; $u_{xx}+u_{\gamma\gamma}=0$. Первое привести к каноническому виду с указанием замены переменных.

П3 Согласование данных

Для $u_t=\alpha u_{xx}$, $0<x<L$, $u(0,t)=0$, $u(L,t)=T_0$, $u(x,0)=\varphi(x)$ проверить согласование $\varphi=0$ и $\varphi=T_0x/L$. Объяснить последствия несогласованности для непрерывности в угловых точках.

П4 Собственные функции

Решить $X''+\lambda X=0$, $X(0)=0$, $X'(L)=0$. Найти спектр, проверить ортогональность первых двух функций.

П5 Ряд Фурье

Разложить $\varphi(x)=x(L-x)$, $0<x<L$, в синусный ряд. Сравнить приближения по первым одной, трём и пяти ненулевым гармоникам.

П6 Формула Даламбера

Решить $u_{tt}=c^2u_{xx}$ на всей прямой, $u(x,0)=\exp(-x^2/\ell^2)$, $u_t(x,0)=0$. Построить профили и указать направления распространения волн.

П7 Свободные колебания

Для закреплённой струны $u_{tt}=c^2u_{xx}$, $0<x<L$, $u(x,0)=A\sin(\pi x/L)+B\sin(3\pi x/L)$, $u_t(x,0)=0$. Найти решение и частоты.

П8 Вынужденные колебания

При нулевых начальных данных и закреплённых концах решить $u_{tt}=c^2u_{xx}+F_0\sin(\pi x/L)\cos(\Omega t)$. Получить первую модальную координату вне резонанса и при $\Omega=\pi c/L$.

П9 Затухание температуры

Решить $u_t=\alpha u_{xx}$ на (0,L), $u(0,t)=u(L,t)=0$, $u(x,0)=T_0\sin(\pi x/L)$, $T_0>0$. Определить время уменьшения максимальной температуры вдвое.

П10 Стационарная и переходная части

Решить тепловую задачу с температурами T_1 и T_2 на концах и начальным распределением $T_1+(T_2-T_1)x/L+A\sin(\pi x/L)$. Найти предел при $t\to\infty$.

П11 Тепловое ядро

На всей прямой решить $u_t=\alpha u_{xx}$ при $u(x,0)=T_0$ для $|x|\le\ell$ и 0 иначе. Представить решение через ядро, исследовать сглаживание и сохранение интеграла температуры.

П12 Лаплас в прямоугольнике
Для $0<x<L$, $0<y<H$ решить $\Delta u=0$ при нулевых данных на $x=0$, $x=L$, $y=0$ и $u(x,H)=T_0 \sin(\pi x/L)$. Проверить решение.
П13 Кольцевая область
Найти осесимметричное решение $\Delta u=0$ для $R_1<r<R_2$, $u(R_1)=T_1$, $u(R_2)=T_2$. Вычислить радиальную плотность теплового потока $j_r=-k\partial u/\partial r$.
П14 Функция Грина
Построить функцию Грина оператора $-d^2/dx^2$ на $(0,L)$ при нулевых условиях Дирихле. Решить $-u''=f_0$ и проверить непосредственным интегрированием.
П15 Сеточная сходимость
Для $-u''=\pi^2 \sin(\pi x)$, $0<x<1$, $u(0)=u(1)=0$ получить решение на сетках $h=1/10, 1/20, 1/40$. Сравнить с $\sin(\pi x)$, найти максимальную узловую ошибку и порядок сходимости.
П16 Устойчивость тепловой схемы
Для стандартной явной схемы $u_t=\alpha u_{xx}$ при $\alpha=10^{-4}$ м²/с и $h=0{,}01$ м найти предельный Δt. Сравнить $\Delta t=0{,}25$ с и $0{,}75$ с. Для демонстрации взять стержень длины 0,1 м, нулевые температуры концов и начальную температуру $100 \sin(\pi x/0{,}1)$ °C.
П17 Первый слой волновой схемы
Вывести формулу первого слоя со вторым порядком по времени для начальных φ и ψ. Проверить условие Куранта при $c=100$ м/с, $h=0{,}1$ м, $\Delta t=0{,}0005$ с.
П18 Линейные конечные элементы
Для $-u''=1$, $0<x<1$, $u(0)=u(1)=0$ получить слабую форму и решение на двух равных линейных элементах. Выписать матрицы и нагрузки, сравнить приближённую функцию с $u=x(1-x)/2$.

5 Тестовые задания
Выберите один правильный ответ. Каждый правильный ответ — 1 первичный балл, неправильный или отсутствующий — 0. Максимум 12 первичных баллов. Ответы приведены в разделе 9.
Т1. Тип уравнения $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$:
А — эллиптический; Б — параболический; В — гиперболический; Г — не определяется.
Т2. Условие теплоизоляции границы при $k>0$:
А — $u=0$; Б — $\partial u/\partial n=0$; В — $u_t=0$; Г — $\Delta u=0$.
Т3. Начальные данные для волнового уравнения второго порядка по времени:
А — только перемещение; Б — только скорость; В — перемещение и скорость; Г — перемещение и ускорение.
Т4. Для непрерывности теплового решения при $u(0,t)=g(t)$, $u(x,0)=\varphi(x)$ необходимо:
А — $\varphi(0)=g(0)$; Б — $\varphi'(0)=g'(0)$; В — $\varphi(L)=g(0)$; Г — $\varphi(0)=0$ всегда.
Т5. Собственные значения $X''+\lambda X=0$, $X(0)=X(L)=0$:
А — $\lambda_n=n\pi/L$; Б — $\lambda_n=(n\pi/L)^2$, $n\ge1$; В — $\lambda_n=0$ для всех n; Г — $\lambda_n=-(n\pi/L)^2$.
Т6. При затухании тепловых мод $\exp[-\alpha(n\pi/L)^2 t]$ быстрее затухает:
А — $n=1$; Б — $n=2$; В — $n=3$; Г — все одинаково.
Т7. Решение чистой задачи Неймана для уравнения Пуассона в связной области при совместных данных:
А — единственно без дополнительных условий; Б — определено до постоянной; В — всегда отсутствует; Г — обязательно равно нулю.
Т8. Периодическая по углу гармоническая функция в круге должна в центре:
А — быть ограниченной для регулярной задачи; Б — обязательно обращаться в бесконечность; В — содержать $\ln r$; Г — иметь произвольный скачок.
Т9. Условие устойчивости стандартной одномерной явной схемы тепла:
А — $\alpha\Delta t/h^2\le1/2$; Б — $\alpha\Delta t/h^2\ge1/2$; В — $c\Delta t/h\le2$; Г — ограничений нет.
Т10. Условие устойчивости стандартной центральной схемы волны на равномерной сетке:
А — $c\Delta t/h\le1$; Б — $c\Delta t/h\ge1$; В — $\alpha\Delta t/h^2\le1/2$; Г — $\Delta t=h^2$ всегда.
Т11. Основной способ оценить сеточную сходимость:
А — увеличить число знаков вывода; Б — сравнить решения на последовательности сгущающихся сеток; В — изменить цвет графика; Г — выполнить расчёт только на одной сетке.
Т12. В слабой форме тепловой задачи заданный граничный поток является:
А — существенным условием; Б — естественным условием; В — начальным условием; Г — условием периодичности.
6 Контрольные работы
Каждая работа состоит из трёх равноценных задач. Максимум — 10 баллов после усреднения оценок задач по рубрике. Преподаватель выбирает вариант; изменение параметров не должно менять сложность и проверяемый метод.
КР1 Постановка задач и спектральные методы
Вариант 1
1. Классифицировать $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}=0$ и привести к каноническому виду.
2. Решить $X''+\lambda X=0$, $X(0)=X(L)=0$.
3. Найти синусные коэффициенты функции x на $(0,L)$.
Вариант 2
1. Классифицировать $u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}=0$ и привести к каноническому виду.
2. Решить $X''+\lambda X=0$, $X(0)=0$, $X'(L)=0$.
3. Найти косинусные коэффициенты функции x на $(0,L)$, включая постоянную составляющую.
КР2 Волны и теплопроводность
Вариант 1
1. Решить задачу П7 при $A=1$, $B=0$.
2. Решить задачу П9 и найти время уменьшения амплитуды вдвое.
3. Для задачи П10 выделить стационарную часть и объяснить предел решения.

Вариант 2
1. Закреплённая струна: $\varphi=0$, $\psi=V\sin(2\pi x/L)$. Найти решение.
2. Теплоизолированный стержень: $\varphi=T_m+A\cos(\pi x/L)$. Найти решение и предел.
3. В задаче П8 вывести модальное уравнение и найти нерезонансное решение.
КР3 Стационарные поля и численная постановка
Вариант 1
1. Решить задачу П12.
2. Решить задачу П13 и найти j_r.
3. Составить разностную систему $-u''=2$ на (0,1), $u(0)=u(1)=0$, $h=1/4$; вычислить узловые значения.
Вариант 2
1. В задаче П12 заменить $\sin(\pi x/L)$ на $\sin(2\pi x/L)$ и найти решение.
2. Для $-u''=f_0$, $u'(0)=g_0$, $u'(L)=gL$ вывести условие совместности и общий вид решения.
3. Для явной схемы тепла при $\alpha=0{,}02$, $h=0{,}1$, $\Delta t=0{,}3$ проверить устойчивость и найти допустимый шаг времени.

7 Расчётно графическая и компьютерные работы
7 1 Расчётно графическая работа
Обучающийся выполняет один вариант. Отчёт содержит постановку, допущения, вывод формул, расчёт, графики, проверку и выводы. Рекомендуемый объём — 6–10 страниц без исходного кода. Варианты параметров назначаются преподавателем.
РГР А Свободные колебания струны
Струна длины L с закреплёнными концами, натяжением N и линейной плотностью μ имеет нулевую начальную скорость и треугольное начальное перемещение: $\varphi(x)=2Ax/L$ при $0\le x\le L/2$; $\varphi(x)=2A(L-x)/L$ при $L/2<x\le L$. Взять $L=1$ м, $N=100$ Н, $\mu=0{,}01$ кг/м, $A=0{,}001$ м.
Определить $c=\sqrt{(N/\mu)}$, собственные частоты и коэффициенты Фурье; построить решения по первым 1, 3 и 5 ненулевым модам; сравнить начальные профили; показать движение за один период первой моды; исследовать влияние удвоения N. Проверить концевые условия и энергию усечённого решения. При проверке скорости дифференцировать ряд по времени.
РГР Б Охлаждение стержня
Для $u_t=\alpha u_{xx}$ на $0<x<L$ задать $u(0,t)=u(L,t)=0$ и $u(x,0)=T_0\sin(\pi x/L)+0{,}3T_0\sin(3\pi x/L)$. Принять $L=0{,}2$ м, $\alpha=10^{-5}$ м²/с, $T_0=100$ °C. Температура отсчитывается относительно температуры концов.
Получить аналитическое решение; построить профили при $t=0$, 100, 500 и 1000 с; построить температуру середины; определить время уменьшения амплитуды первой моды в десять раз; исследовать влияние удвоения α. Проверить начальные и граничные условия, знаки показателей затухания и тепловой баланс с учётом потока через концы.
Вопросы для защиты РГР
Какие допущения позволяют использовать выбранное уравнение?
Как граничные условия определяют собственные функции?
Какие величины определяют временной масштаб процесса?
Как выполнена проверка решения и что изменится при других условиях на концах?
7 2 Компьютерная работа К1
Сеточная сходимость стационарного решения. Выполнить П15 на трёх сетках. Представить код, матрицу или описание её сборки, таблицу h и ошибок E_h, графики и оценку $p=\log_2(E_h/E_{h/2})$. Объяснить порядок аппроксимации и отличие невязки алгебраической системы от ошибки относительно точного решения.
7 3 Компьютерная работа К2
Нестационарная теплопроводность. Использовать параметры и данные РГР-Б. На сетке $h=L/20$ реализовать явную и неявную схемы. Для явной схемы взять $r=\alpha\Delta t/h^2=0{,}4$ и затем $r=0{,}8$; для неявной — $r=0{,}8$. Сравнить с аналитическим решением в общий момент $t=800$ с. Если высокий пространственный мод не возбуждает наблюдаемую неустойчивость, добавить к внутренним начальным узлам возмущение $10^{-6}T_0(-1)^i$, сохранив нулевые концевые значения.
Представить алгоритм, параметры сеток, код, графики, максимальные узловые ошибки устойчивых расчётов и объяснение поведения неустойчивой схемы. Показать, что устойчивость не гарантирует точности при большом шаге времени. Неустойчивый расчёт используется только как демонстрация и не принимается как физическое решение.
Вопросы для защиты компьютерных работ
Как сформированы начальные и граничные узлы?
Какая величина контролирует устойчивость схемы?
Какой эталон использован для расчёта ошибки?
Почему уменьшение невязки не устраняет ошибку дискретизации?
Как подтвердить воспроизводимость расчёта и сходимость при сгущении сетки?
8 Промежуточная аттестация
Предлагается письменный вариант с двумя теоретическими вопросами и одной практической задачей, затем краткое собеседование. Время письменной части — 90 минут, собеседование — до 10 минут. Для зачёта преподаватель может использовать тот же банк с объёмом и временем, установленными локальными правилами.
8 1 Теоретические вопросы
А1. Вывод уравнения теплопроводности и смысл параметров.
А2. Вывод волнового уравнения струны и ограничения модели.
А3. Уравнения Лапласа и Пуассона в инженерных моделях.
А4. Классификация уравнений второго порядка.
А5. Характеристики и канонический вид.
А6. Типы задач, корректность и согласование данных.
А7. Условия Дирихле, Неймана и Робина.
А8. Разделение переменных и задача Штурма — Лиувилля.
А9. Ряды Фурье и спектральные коэффициенты.

А10. Формула Даламбера и область зависимости.
А11. Собственные формы и частоты закреплённой струны.
А12. Вынужденные колебания и резонанс.
А13. Энергия волнового движения и её сохранение.
А14. Теплопроводность на отрезке методом Фурье.
А15. Приведение неоднородных граничных условий к однородным.
А16. Теплоизоляция, источники и баланс тепла.
А17. Тепловое ядро и задача Коши.
А18. Принцип максимума для теплового уравнения.
А19. Гармонические функции, свойство среднего и принцип максимума.
А20. Задача Дирихле в прямоугольнике.
А21. Совместность и единственность задачи Неймана.
А22. Уравнение Лапласа в полярных координатах; круг и кольцо.
А23. Одномерная функция Грина и интегральное решение.
А24. Разностное решение задачи Пуассона и граничные условия.
А25. Явная и неявная схемы тепла; метод прогонки.
А26. Центральная схема волны, первый слой и условие Куранта.
А27. Аппроксимация, устойчивость, сходимость и проверка решения.
А28. Слабая постановка и виды граничных условий.
А29. Линейный конечный элемент и сборка системы.
А30. Сопоставление аналитических и численных подходов.
8 2 Пример комплекта вариантов
Практические задачи берутся из раздела 4 в полном объёме. Это пример комплектации; перед проведением преподаватель проверяет равенство трудоёмкости и при необходимости сокращает графическую часть, сохраняя математическую проверку.
Вариант Вопрос 1 Вопрос 2 Задача
1 А4 А14 П7
2 А6 А11 П9
3 А7 А20 П4
4 А8 А17 П12
5 А10 А24 П10
6 А13 А21 П6
7 А1 А26 П13
8 А3 А25 П17
9 А5 А28 П14
10 А9 А18 П8
11 А16 А29 П2
12 А19 А27 П18

8 3 Критерии промежуточной аттестации
Каждый теоретический вопрос оценивается из 25: точность понятий и формул — 10, логика вывода и условия применимости — 10, физический смысл или пример — 5. Практическая задача оценивается из 50: постановка и метод — 10, вычисления — 20, проверка — 10, интерпретация — 10. Максимум А=100. Для положительного результата дополнительно требуется не менее 20 из 50 за практическую задачу.
Положительный результат подтверждает способность применять метод к типовой задаче, а не только воспроизводить определения. Если итоговый балл ≥50, но практическая часть <20, результат считается неподтверждённым; после устранения пробела проводится повторная оценка по правилам вуза. Оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» назначаются по шкале раздела 2 при выполнении порога практической части.

9 Ответы и ориентиры для преподавателя
Раздел предназначен преподавателю. При выдаче заданий обучающимся ключи и эталоны исключаются. Принимаются математически эквивалентные решения с корректными знаками, условиями и размерностями.
9 1 Ключ теста
Задание Ответ Задание Ответ
Т1 Б Т7 Б
Т2 Б Т8 А
Т3 В Т9 А
Т4 А Т10 А
Т5 Б Т11 Б
Т6 В Т12 Б

9 2 Эталоны практических задач
П1. Баланс на элементе стержня и $j=-ku_x$ дают $\rho c_p u_t = k u_{xx} + q$. Условия: $u(0,t)=T_1(t)$, $u_x(L,t)=0$, $u(x,0)=\varphi(x)$. Для гладкого согласования $\varphi(0)=T_1(0)$, $\varphi'(L)=0$. Размерности: k — Вт/(м·К), ρ — кг/м³, c_p — Дж/(кг·К), q — Вт/м³, α — м²/с.
П2. B^2-AC: 3, 0, −1; типы — гиперболический, параболический, эллиптический. Для первого $\xi=y-(2+\sqrt{3})x$, $\eta=y-(2-\sqrt{3})x$. Главная часть равна $-12U_{\xi\eta}$, поэтому $U_{\xi\eta}=0$.
П3. Требуются $\varphi(0)=0$, $\varphi(L)=T_0$. При $T_0\neq 0$ функция $\varphi=0$ не согласована в (L,0); линейная функция согласована и является стационарным решением. Несогласованность не означает отсутствия решения при $t>0$, но исключает непрерывность в

соответствующей угловой точке.
П4. $\lambda_n=[(n+1/2)\pi/L]^2$, $X_n=\sin[(n+1/2)\pi x/L]$, n=0,1,…; интеграл произведения разных функций равен 0, норма в квадрате L/2.
П5. $b_n=4L^2[1-(-1)^n]/(\pi^3 n^3)$; чётные коэффициенты равны нулю. Для нечётных $b_n=8L^2/(\pi^3 n^3)$. Первые пять ненулевых гармоник имеют номера 1,3,5,7,9.
П6. $u(x,t)=\tfrac{1}{2}\exp[-(x-ct)^2/\ell^2]+\tfrac{1}{2}\exp[-(x+ct)^2/\ell^2]$. Правая и левая волны распространяются со скоростями c и −c.
П7. $u=A\sin(\pi x/L)\cos(\pi ct/L)+B\sin(3\pi x/L)\cos(3\pi ct/L)$. Круговые частоты πc/L и 3πc/L; частоты в герцах c/(2L) и 3c/(2L).
П8. ω=πc/L, $u=z(t)\sin(\pi x/L)$, $z''+\omega^2 z=F_0\cos(\Omega t)$. При Ω≠ω: $z=F_0[\cos(\Omega t)-\cos(\omega t)]/(\omega^2-\Omega^2)$. При Ω=ω: $z=F_0 t\sin(\omega t)/(2\omega)$.
П9. $u=T_0\exp(-\alpha\pi^2 t/L^2)\sin(\pi x/L)$; $t_{1/2}=L^2\ln 2/(\alpha\pi^2)$.
П10. $u=T_1+(T_2-T_1)x/L+A\exp(-\alpha\pi^2 t/L^2)\sin(\pi x/L)$. Предел — линейная стационарная часть.
П11. $u=T_0\int$ от $-\ell$ до ℓ $[\exp(-(x-\xi)^2/(4\alpha t))/\sqrt{(4\pi\alpha t)}]d\xi$. Эквивалентно $u=(T_0/2)\{\mathrm{erf}[(x+\ell)/(2\sqrt{(\alpha t)})]-\mathrm{erf}[(x-\ell)/(2\sqrt{(\alpha t)})]\}$. Интеграл по всей прямой равен $2\ell T_0$; при t>0 профиль гладкий.
П12. $u=T_0\sin(\pi x/L)\sinh(\pi y/L)/\sinh(\pi H/L)$. Для второй гармоники π заменяется на 2π.
П13. $u=T_1+(T_2-T_1)\ln(r/R_1)/\ln(R_2/R_1)$; $j_r=-k(T_2-T_1)/[r\ln(R_2/R_1)]$. Величина rj_r постоянна.
П14. $G(x,\xi)=x(L-\xi)/L$ при $x\le\xi$ и $\xi(L-x)/L$ при $x\ge\xi$. Скачок G_x справа минус слева равен −1. $u=\int G f_0 d\xi=f_0 x(L-x)/2$.
П15. $(2U_i-U_{i-1}-U_{i+1})/h^2=\pi^2\sin(\pi x_i)$. $U_i=[\pi^2 h^2/(4\sin^2(\pi h/2))]\sin(\pi x_i)$. Для указанных сеток ошибка второго порядка, $p\approx 2$.
П16. $r=\alpha\Delta t/h^2\le 1/2$, $\Delta t_{max}=0{,}5$ с. При 0,25 с r=0,25 — устойчиво; при 0,75 с r=0,75 — схема неустойчива. Краткий расчёт с гладкими данными может скрыть рост высокочастотных ошибок.
П17. $U_i^1=\varphi_i+\Delta t\psi_i+(c^2\Delta t^2/2h^2)(\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1})$. Число Куранта $c\Delta t/h=0{,}5\le 1$.
П18. Слабая форма: $\int u'v'dx=\int v\,dx$, v(0)=v(1)=0. $K_e=(1/h)[[1,-1],[-1,1]]$, $F_e=(h/2)[1,1]$. При h=0,5 внутреннее уравнение 4U=0,5, U=1/8. Узлы совпадают с точным решением, между узлами решение кусочно-линейное и имеет ошибку.
9 3 Ориентиры контрольных работ
КР1, вариант 1: классификация — П2; $\lambda_n=(n\pi/L)^2$, $X_n=\sin(n\pi x/L)$, n≥1; для функции x синусные коэффициенты $b_n=2L(-1)^{n+1}/(n\pi)$. Вариант 2: ξ=y−x, η=y+3x дают $-16U_{\xi\eta}=0$; смешанный спектр — П4; косинусный ряд $x=L/2+\Sigma a_n\cos(n\pi x/L)$, $a_n=2L[(-1)^n-1]/(n^2\pi^2)$.
КР2, вариант 1: использовать П7, П9 и П10. Вариант 2: волна $u=VL/(2\pi c)\sin(2\pi x/L)\sin(2\pi ct/L)$; тепло $u=T_m+A\exp(-\alpha\pi^2 t/L^2)\cos(\pi x/L)$; вынужденные колебания — П8.
КР3, вариант 1: использовать П12 и П13. Узлы задачи $-u''=2$: $U_1=3/16$, $U_2=1/4$, $U_3=3/16$; матрица с диагональю 2 и соседними −1, правая часть каждого внутреннего уравнения 1/8. Вариант 2: в П12 заменить π на 2π; совместность $f_0L=g_0-gL$, решение $u=-f_0x^2/2+g_0x+C$; r=0,6, схема неустойчива, $\Delta t_{max}=0{,}25$.
9 4 Ориентиры РГР и компьютерных работ
РГР-А: c=100 м/с, $f_1=50$ Гц, период 0,02 с. $b_n=8A\sin(n\pi/2)/(\pi^2 n^2)$; чётные моды отсутствуют. Удвоение натяжения увеличивает частоты в √2 раза. Для усечённого ряда $E=\tfrac{1}{2}\int[\mu u_t^2+N u_x^2]dx$ постоянно при точном вычислении во времени.
РГР-Б: $u=T_0e^{(-\alpha\pi^2 t/L^2)}\sin(\pi x/L)+0{,}3T_0e^{(-9\alpha\pi^2 t/L^2)}\sin(3\pi x/L)$. Время уменьшения первой моды в десять раз $L^2\ln 10/(\alpha\pi^2)\approx 933{,}2$ с. При удвоении α временные масштабы уменьшаются вдвое. Баланс: $d/dt\int u\,dx=\alpha[u_x(L,t)-u_x(0,t)]$.
К1: ожидаемые максимальные ошибки приблизительно 0,00827; 0,00206; 0,000514, p близок к 2. К2: h=0,01 м; при r=0,4 Δt=4 с, при r=0,8 Δt=8 с. Неявная схема назад по времени устойчива для этих шагов, но обладает временной ошибкой первого порядка. Неустойчивость явной схемы подтверждается ростом высокочастотного возмущения.
9 5 Проверка теоретических ответов
Для вопросов А1–А7 ожидаются корректные модели, допущения, типы уравнений и полный набор условий. Для А8–А18 — вывод выбранного представления решения, коэффициенты, проверка условий, физический смысл и ограничения. Для А19–А23 — постановка краевой задачи, свойства гармонических функций, совместность Неймана и корректный знак функции Грина. Для А24–А30 — дискретная или слабая постановка, включение границ, условия устойчивости, проверка ошибки и отличие устойчивости от точности.

5.4. Перечень видов оценочных средств

Для текущего контроля целесообразно использовать устный опрос, тесты, практические и домашние задания, контрольные работы, расчётно-графическую работу и компьютерные задания с защитой.
Для промежуточной аттестации рекомендуется комплект билетов или равноценных вариантов: два теоретических вопроса и одна практическая задача.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Тихонов А.Н., Самарский А.А.	Уравнения математической физики: учебное пособие для вузов	Москва: Наука 19771972

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Владимиров В.С.	Уравнения математической физики: учебник для вузов	М.: Наука 1981

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Жидков О.П., Никуличева Т.Б.	Методы математической физики. Ч. 1. Уравнения математической физики: учебно-методическое пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2008

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий	
6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии	
6.3.1.1	MATLAB с пакетом Partial Differential Equation Toolbox — численное решение уравнений теплопроводности, волновых уравнений и краевых задач методом конечных элементов; визуализация результатов. MATLAB
6.3.1.2	Python с библиотеками NumPy, SciPy, SymPy и Matplotlib — реализация разностных схем, вычисление собственных значений, символьные преобразования и построение графиков решений. scipy.org
6.3.1.3	Maxima с интерфейсом wxMaxima — аналитические вычисления, интегрирование, преобразование Лапласа, вычисление коэффициентов рядов Фурье и проверка полученных формул.
6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения	
6.3.2.1	Перечень профессиональных баз данных
6.3.2.2	1. Math-Net.Ru — общероссийский математический портал: научные публикации по дифференциальным уравнениям, математической физике и вычислительной математике.
6.3.2.3	2. zbMATH Open — международная база библиографических описаний, рефератов и рецензий на работы по математике и её приложениям. zbmath.math.cas.cz
6.3.2.4	3. eLIBRARY.RU — научная электронная библиотека для поиска публикаций по математическому моделированию, механике и численным методам.
6.3.2.5	Перечень информационных справочных систем
6.3.2.6	1. NIST Digital Library of Mathematical Functions — DLMF — справочник по специальным функциям, применяемым при решении уравнений математической физики, включая функции Бесселя и Лежандра. Digital Library of Mathematical Functions
6.3.2.7	2. Wolfram MathWorld — математическая энциклопедия для уточнения определений, формул и свойств математических объектов.

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

1. Общие рекомендации

Освоение дисциплины предполагает последовательное изучение математических моделей колебательных процессов, теплопроводности и стационарных полей, методов аналитического и численного решения соответствующих задач. Обучающемуся необходимо связывать математические преобразования с физическим содержанием рассматриваемого процесса, обосновывать исходные допущения и проверять полученные результаты.

Перед началом изучения курса рекомендуется повторить:

- частные производные, определённые и несобственные интегралы;
- обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка;
- собственные значения и собственные векторы, системы линейных уравнений;
- ряды Фурье и ортогональность функций;
- законы сохранения, основы колебаний и теплопередачи.

Работу по дисциплине следует выполнять регулярно: после каждой лекции уточнять конспект, разбирать рассмотренные примеры и решать задачи по соответствующей теме. Вопросы, вызывающие затруднения, необходимо фиксировать для обсуждения на практических занятиях и консультациях.

2. Рекомендации по работе на лекциях

При подготовке к лекции следует ознакомиться с её темой, повторить необходимые определения и просмотреть материал предыдущего занятия.

В конспекте рекомендуется выделять:

- постановку математической задачи и физический смысл неизвестной функции;
- допущения, использованные при построении модели;
- уравнение, начальные и граничные условия;
- основные этапы вывода решения;
- условия применимости метода;
- способы проверки и интерпретации результата.

Формулы необходимо записывать вместе с пояснениями обозначений. Следует различать скорость распространения волны, температуропроводность, теплопроводность, круговую частоту и частоту в герцах.

После лекции рекомендуется восстановить пропущенные этапы преобразований и самостоятельно воспроизвести ключевой вывод. При изучении теорем важно понимать их условия и следствия: например, как принцип максимума помогает оценивать решение, а ортогональность собственных функций — находить коэффициенты разложения.

3. Рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Перед практическим занятием необходимо изучить соответствующий теоретический материал, разобрать пример применения метода и подготовить выполненные домашние задания.

Решение задачи рекомендуется вести в следующей последовательности:

1. Установить физическое содержание задачи, расчётную область и неизвестную функцию.
2. Записать уравнение, параметры, начальные и граничные условия.
3. Определить тип уравнения и проверить согласование исходных данных.
4. Выбрать метод решения и обосновать его применимость.
5. Выполнить преобразования, определить неизвестные коэффициенты.
6. Проверить уравнение и заданные условия.
7. Оценить размерности, предельное поведение и физический смысл результата.
Запись решения должна позволять проследить ход рассуждений. Приведение только итоговой формулы без объяснения метода и проверки условий не является достаточным.
Если задача решается несколькими способами, полезно сопоставить результаты и определить, какой подход удобнее для заданных условий.
4. Рекомендации по изучению основных разделов
Математические модели и постановка задач.
Следует освоить связь между законами баланса и дифференциальными уравнениями. При классификации уравнения необходимо внимательно учитывать принятую запись смешанной производной: в форме \(Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+\ldots=0\) используется дискриминант \(B^2-AC\). При постановке задачи важно различать начальные и граничные условия и объяснять их физический смысл.
Разделение переменных и спектральные методы.
Особое внимание необходимо уделить получению задачи на собственные значения из граничных условий. Следует понимать, что выбор синусного, косинусного или другого базиса определяется постановкой задачи. При вычислении коэффициентов Фурье требуется учитывать норму собственных функций и, при необходимости, весовую функцию.
Волновое уравнение.
При использовании формулы Даламбера рекомендуется отдельно анализировать вклад начального перемещения и начальной скорости. Для ограниченной системы необходимо связывать собственные функции с формами колебаний, а собственные значения — с частотами. В задачах вынужденных колебаний следует проверять возможность резонанса и учитывать ограничения модели без демпфирования.
Уравнение теплопроводности.
Следует различать стационарную и переходную составляющие решения. При неоднородных граничных условиях необходимо сначала определить способ их приведения к однородным. В спектральном решении важно проверять знак показателей экспонент и объяснять затухание температурных мод. Тепловой баланс следует анализировать с учётом источников и потоков через границы.
Уравнения Лапласа и Пуассона.
Выбор координат необходимо согласовывать с геометрией области. Для задачи в круге следует учитывать регулярность решения в центре, для кольцевой области — наличие внутренней границы. В чистой задаче Неймана требуется проверить совместность данных и указать условие, устраняющее неопределённость решения с точностью до постоянной.
Численные методы.
Необходимо различать ошибку дискретизации, ошибку решения алгебраической системы и ошибку округления. Условия устойчивости проверяются до проведения расчёта. При изучении метода конечных элементов следует последовательно проследить переход от исходного уравнения к слабой форме, локальным матрицам и глобальной системе.
5. Организация самостоятельной работы
Самостоятельная работа включает изучение литературы, повторение лекционного материала, решение индивидуальных задач, выполнение расчётно-графической и компьютерных работ, подготовку к контролю.
Для каждой темы рекомендуется:
- составить краткую запись основных понятий и формул;
- воспроизвести один ключевой вывод;
- решить типовую задачу без обращения к готовому решению;
- проверить результат и объяснить его физическое содержание;
- отметить неясные вопросы для консультации.
При работе с учебной литературой следует сопоставлять обозначения и принятые соглашения. Различия в знаке оператора, определении коэффициентов Фурье или записи граничного потока могут изменять внешний вид формул при одинаковом содержании.
6. Выполнение расчётно-графической работы
Расчётно-графическая работа выполняется по индивидуально назначенному варианту. До начала вычислений необходимо уточнить исходные данные, единицы измерения и требуемые результаты.
В отчёт следует включить:
1. Условие задачи и исходные данные.
2. Математическую модель и принятые допущения.
3. Обоснование метода решения.
4. Основные преобразования и расчётные формулы.
5. Графики с обозначениями осей, единицами измерения и легендой.
6. Проверку решения.
7. Выводы о влиянии параметров и характере процесса.
Количество членов ряда необходимо выбирать осознанно, сопоставляя результаты при увеличении числа учитываемых мод. В выводах следует описывать полученные зависимости, а не ограничиваться перечислением выполненных действий.
При защите обучающийся должен объяснить постановку задачи, выбор метода, определение коэффициентов и способы проверки результата.
7. Выполнение компьютерных заданий
Компьютерные задания выполняются в согласованной с преподавателем среде. Программа должна содержать понятные

обозначения параметров и позволять воспроизвести расчёт.
Рекомендуется следующий порядок работы:
1. Получить дискретную постановку задачи.
2. Проверить формулы и включение граничных условий.
3. Выбрать пространственный и временной шаги.
4. Проверить условия устойчивости.
5. Выполнить расчёт на простой тестовой задаче.
6. Сравнить результат с аналитическим решением.
7. Исследовать изменение ошибки при сгущении сетки.
Для устойчивых схем следует представить количественную оценку ошибки. Графического совпадения кривых недостаточно для вывода о точности.
Средства компьютерной математики и ИИ допускается использовать для вспомогательных вычислений и проверки в пределах правил, установленных преподавателем. Полученные формулы и код необходимо самостоятельно проверить; обучающийся должен уметь объяснить каждый существенный этап решения.
8. Подготовка к текущему контролю и промежуточной аттестации
При подготовке к текущему контролю необходимо ориентироваться на контрольные вопросы и задания соответствующего раздела. Следует тренироваться выполнять решения самостоятельно, с последовательной записью метода и проверкой условий.
Подготовку к промежуточной аттестации рекомендуется организовать по трём направлениям:
- повторение математических моделей и постановок задач;
- воспроизведение основных аналитических и численных методов;
- решение типовых задач с проверкой и интерпретацией результата.
Ответ на теоретический вопрос должен включать определения, основные формулы, условия применимости и пояснение физического смысла. В практической задаче оценивается не только результат, но и обоснованность выбранного метода.
Форма аттестации, сроки, разрешённые справочные материалы и программные средства уточняются преподавателем в соответствии с учебным планом и правилами университета.
9. Работа над ошибками и консультации
После проверки работы необходимо установить причину каждой ошибки: неверная постановка, неприменимый метод, ошибка преобразований, несогласованные условия или нарушение устойчивости.
Исправление рекомендуется выполнять с кратким пояснением причины ошибки и повторной проверкой результата. На консультацию следует приходить с собственной попыткой решения и конкретным вопросом.
Основной признак освоения дисциплины — способность самостоятельно перейти от описания физического процесса к математической задаче, выбрать подходящий метод, получить решение и обоснованно оценить его достоверность.